中国科学(E 辑)
第 26 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series E) 1996 年 2 月

能控系统的适应极点配置*

陈翰馥 张纪峰

(中国科学院系统科学研究所, 北京 100080)

摘要 在系统能控的条件下,给出了计算简化了的适应极点配置控制,使闭环系统的输入、输出有界. 和以往工作相比,设计了随机停时,对参数估计的修正能在有穷时间内停住,使修正次数从无穷次降为有穷次. 并进一步,减少修正量的维数,使计算量有了数量级的减少.

关键词 适应控制 参数估计 极点配置 Sylvester 矩阵

参数已知的定常参数系统可任意配置极点的充分必要条件为系统是能控的. 在适应控制中,自然也希望仅在能控的条件下进行极点配置. 对最小相位系统,系统的输出有界性能保证系统输入的有界性. 已有许多工作给出了使系统输入输出有界的适应控制[1, 2]. 对非最小相位系统,为了得到一个稳定的闭环系统,人们用各种方法构造适应控制律,例如,Kreisselmeier 和 Giri 等的自激励法[3,4], Chen 和 Zhang 等的大激励法[5], Lozano 等的参数修正法[6]等. Kreisselmeier 讨论的是无干扰、无未建模动态特性的定常参数系统,他给出的适应控制具有一定的自激励功能. 当系统的参数估计得不好致使系统的输入输出发散时,控制律会利用发散的输入输出值迫使系统的参数估计值向系统的真实参数值靠近,从而使闭环系统的性能变好. Giri 等把这一想法用来解决具有有界干扰、未建模动态特性及慢时变参数的系统的适应控制问题[4], 只是证明有待完善[7]. Chen 和 Zhang 研究具有平均有界干扰的定常参数随机系统,对系统引入外加信号,提高系统信噪比,以得到较精确的参数估计,然后利用必然等价原则给出适应控制律[5]. 对具有有界干扰及未建模动态特性的定常参数系统, Lozano 等将死区法与最小二乘法结合起来估计系统的参数,并证明所给出的参数估计具有自收敛特性. 他们利用这一收敛特性来修正参数估计值,克服了和参数估计相应的 Sylvester 矩阵奇异性带来的困难,在理论上提供了一种基于极点配置的适应镇定方法[6]. 最近,对具有平均有界干扰的定常参数随机系统, Guo[8] 基于加权最小二乘法的自收敛性设计了一种改善闭环系统能控性的随机搜索法,该方法在每个采样时刻最多只需计算两个行列式.

本文采用的是随机停时法,使对参数估计的修正只需间隔式地进行有穷次,并且根据 $F(t)$ 极限阵的秩,适应性地降低修正参数的维数,使计算量有了数量级的减少. 例如,对一个三阶系统,若参数估计过程中 $F(t)$ 的极限阵的秩为 1, 利用本文的方法每次修正大约需要计算 7 个

1995-01-04 收稿, 1995-09-21 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目

六阶矩阵的行列式加一个矩阵奇异值分解，而文献[6]中的修正法却需要计算 46 656 个六阶矩阵的行列式；而且本文只修正有限次，而据文献[6]需永远修正下去．利用本文设计的停时，在计算简化了的适应极点配置控制作用下，当开环系统能控时，闭环系统的输入输出有界．

1 系统模型及参数估计

设单输入单输出系统由差分方程描述:

$$A(z)y(t)=B(z)u(t)+w(t), \tag{1.1}$$

其中 $u(t)$, $y(t)$, $w(t)$ 分别是系统的输入、输出和干扰，z 是单位后移算子，

$$A(z)=1+a_1z+\cdots+a_nz^n, \quad B(z)=b_1z+\cdots+b_nz^n. \tag{1.2}$$

把 $A(z)$ 和 $B(z)$ 中的未知参数记为 $\theta\triangleq[a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n]^\tau$, 并记

$$\varphi(t-1)^\tau=[-y(t-1), \cdots, -y(t-n), u(t-1), \cdots, u(t-n)], \tag{1.3}$$

则方程(1.1)表示为

$$y(t)=\theta^\tau\varphi(t-1)+w(t). \tag{1.4}$$

对不同的 $w(t)$, 将用不同的方法来估计 θ. 具体地说，将分两种情形．

情形 1) 设 $w(t)$ 表示系统的未建模动态，但已知非负实数 η 和 μ 使得 $|w(t)|\leqslant\eta+\mu\|\varphi(t-1)\|$. 这时用死区最小二乘法来估计 θ. 记

$$\overline{\varphi}(t-1)=\frac{\varphi(t-1)}{1+\|\varphi(t-1)\|}, \quad \overline{y}(t)=\frac{y(t)}{1+\|\varphi(t-1)\|}, \tag{1.5}$$

$$\delta(t)=\mu+\frac{\eta}{1+\|\varphi(t-1)\|}, \quad e(t)=\overline{y}(t)-\theta^\tau(t-1)\overline{\varphi}(t-1), \tag{1.6}$$

$$v(t)=e(t)^2+\overline{\varphi}^\tau(t-1)F^2(t-1)\overline{\varphi}(t-1), \tag{1.7}$$

$$\overline{\delta}(t)=(1+\mathrm{tr}F(0))(\delta(t)^2+\varepsilon\delta(t)), \tag{1.8}$$

$$\lambda(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } v(t)\leqslant\overline{\delta}(t)\text{ 时},\\ 1, & \text{当 } v(t)>\overline{\delta}(t)\text{ 时},\end{cases} \tag{1.9}$$

这里 $\varepsilon>0$ 是任意事先选定的正数，$\mathrm{tr}F(0)$ 表示阵 $F(0)$ 的迹．

死区最小二乘参数估计由递推式给出:

$$\theta(t)=\theta(t-1)+\lambda(t)F(t)\overline{\varphi}(t-1)e(t), \tag{1.10}$$

$$F(t)=F(t-1)-\frac{\lambda(t-1)F(t-1)\overline{\varphi}(t-1)\overline{\varphi}^\tau(t-1)F(t-1)}{1+\lambda(t)\overline{\varphi}^\tau(t-1)F(t-1)\overline{\varphi}(t-1)}, \tag{1.11}$$

其中初值 $\theta(0)$ 和 $F(0)>0$ 任意取定．

情形 2) $\{w(t), \mathscr{F}_t\}$ 为鞅差序列，并且 $\sup\limits_{t\geqslant0}E[w^2(t+1)|\mathscr{F}_t]<\infty$ a.s., 这时 θ 用加权最小二乘法来估计:

$$\theta(t+1)=\theta(t)+\frac{P(t)\varphi(t)}{f(t)+\varphi^\tau(t)P(t)\varphi(t)}[y(t+1)-\theta^\tau(t)\varphi(t)], \tag{1.12}$$

$$P(t+1)=P(t)-\frac{P(t)\varphi(t)\varphi^{\tau}(t)P(t)}{f(t)+\varphi^{\tau}(t)P(t)\varphi(t)},\tag{1.13}$$

其中初值 $\theta(0)$ 和 $P(0)>0$ 任意取定,

$$f(t)=\left(\log\left(1+\|P(0)\|+\sum_{i=0}^{t}\|\varphi(i)\|^2\right)\right)^{1+\delta},\quad \delta>0.\tag{1.14}$$

当 $A(z)$ 和 $B(z)$ 互质时,文献[6]和[8]分别对(1.5)～(1.11)和(1.12)～(1.14)式给出的 $\theta(t)$, $F(t)$ 和 $P(t)$ 证明了它们的自收敛性,也就是对任何反馈控制$\{u(t)\}$,当 $t\to\infty$ 时,$\theta(t)$, $F(t)$ 和 $P(t)$ 都收敛到有穷极限.

2　有限步修正参数估计的适应控制

解决适应极点配置问题时,如果用必然等价原则来求适应控制,首先碰到的问题是由参数估计值 $\theta(t)$ 导出的 Sylvester 矩阵可能奇异. 为此,文献[6]引入矢量 $\beta(t)$, 对 $\theta(t)$ 进行修正,用 $\overline{\theta}(t)$ 来取代 $\theta(t)$ 导出新 Sylvester 矩阵:

$$\overline{\theta}(t)=\theta(t)+F(t)\beta(t),\tag{2.1}$$

这里对情形 1), $F(t)$ 由(1.11)式给出,对情形 2), $F(t)=P^{1/2}(t)$.

文献[6]引进的 $\beta(t)$ 具有下列性质: 1) $\beta(t)$ 有界; 2) $\beta(t)$ 使由 $\overline{\theta}(t)$ 导出的 Sylvester 矩阵的行列式的绝对值对某 $t_0\geqslant 0$ 及一切 $t\geqslant t_0$ 一致地大于某一正数.

将 $\overline{\theta}(t)$ 分块表示为

$$\overline{\theta}(t)=[\overline{a}_1(t),\cdots,\overline{a}_n(t),\ \overline{b}_1(t),\ \cdots,\ \overline{b}_n(t)]^{\tau},\tag{2.2}$$

并记

$$\overline{A}(t,\ z)=1+\overline{a}_1(t)z+\cdots+\overline{a}_n(t)z^n,\quad \overline{B}(t,\ z)=\overline{b}_1(t)z+\cdots+\overline{b}_n(t)z^n.\tag{2.3}$$

由于 $\overline{\theta}(t)$ 导出的新 Sylvester 矩阵 $M(\overline{\theta}(t))$ 非奇异,这里

$$M(\overline{\theta}(t))\triangleq\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_1(t)\cdots\cdots & \cdots\cdots & \overline{a}_n(t) & 0\cdots 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots\ 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1\ \ \overline{a}_1(t) & \cdots\cdots\cdots & \overline{a}_n(t) \\ 0 & \overline{b}_1(t) & \cdots\cdots\cdots & \overline{b}_n(t) & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \ddots\ \vdots \\ \vdots & & \ddots\ \ddots & & \ddots\ 0 \\ 0 & \cdots 0 & 0\ \ \overline{b}_1(t) & \cdots\cdots\cdots & \overline{b}_n(t) \end{pmatrix}^{\tau},\tag{2.4}$$

所以 $\overline{A}(t,\ z)$ 和 $\overline{B}(t,\ z)$ 互质. 进而,对任一阶次不高于 $2n-1$ 的首一稳定多项式 $C(z)$, 可解出多项式 $R(t,\ z)$ 和 $S(t,\ z)$:

$$\overline{A}(t,\ z)S(t,\ z)+\overline{B}(t,\ z)R(t,\ z)=C(z).\tag{2.5}$$

设 $y^*(t)$ 是已知的有界信号,根据必然等价原则,极点配置适应控制为

$$u(t)=[1-S(t,\ z)]u(t)-R(t,\ z)y(t)+C(z)y^*(t).\tag{2.6}$$

由文献[6]和[8]有如下命题:

命题 1 设 $A(z)$ 与 $B(z)$ 互质, (2.1) 式中的 $\beta(t)$ 具有性质 1) 和 2). 对情形 1) 所讨论的 $w(t)$, 当 $\theta(t)$ 和 $F(t)$ 由 (1.5) ~ (1.11) 式给出时, 那么存在 $\overline{\mu}>0$ 使得对任意的 $\mu\in[0,\ \overline{\mu})$, 在由 (2.1) ~ (2.6) 式给出的适应极点配置控制的作用下, 闭环系统的输入输出是有界的[6]. 对情形 2) 所讨论的 $w(t)$, 当参数估计由加权最小二乘法 (1.12) ~ (1.14) 式给出时, 那么在 (2.1) ~ (2.6) 式给出的适应极点配置控制的作用下, 闭环系统的输入输出是有界的[8].

文献[6] 对 (2.1) 式中的修正参数 $\beta(t)$ 的选取方法如下:

记 $m=2n,\ l=m^{m-1}$, 任意取定 ml 个实数 $\sigma_1,\ \sigma_2,\cdots,\ \sigma_{ml}$ 使 $\sigma_i\geqslant\sigma_{i-1}+1$. 令 $\beta_i=[\sigma_i,\ \sigma_i^m,\ \cdots,\ \sigma_i^l]^\tau$, $\mathscr{M}=\{\beta_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ ml\}$,

$$h_t(\beta(t))\triangleq|\det M(\theta(t)+F(t)\beta(t))|, \tag{2.7}$$

$$\beta(t)=\begin{cases}\beta(t-1), \text{如果 } h_t(\beta_i)<(1+\gamma)h_t(\beta(t-1)),\ \forall\beta_i\in\mathscr{M},\\ \beta_j, \quad j=\min\{i:\ h_t(\beta_i)\geqslant(1+\gamma)h_t(\beta(t-1)),\ \text{且 } h_t(\beta_i)\geqslant h_t(\beta_s),\ \forall\beta_s\in\mathscr{M}\},\end{cases}$$

这里 γ 是一充分小的正数.

从这里可以看到, 进行这样的参数修正, 每步要算 $(2n)^{2n}$ 个 $2n$ 阶的矩阵行列式, 并且这样的计算不截断, 要一直算下去.

我们在这一节中, 给出停时, 使这样的修正只进行有限步. 在下一节中, 将降低 $\beta(t)$ 的维数, 进一步减少计算量.

设 $\tau_1=1$. 选 $\beta_{\tau_k}\in\mathscr{M}$ 使

$$h_{\tau_k}(\beta_{\tau_k})=\max_{\beta_i\in\mathscr{M}}h_{\tau_k}(\beta_i). \tag{2.8}$$

定义

$$\tau_{k+1}=\inf\left\{t:\ t>\tau_k,\quad h_t(\beta_{\tau_k})\leqslant\frac{1}{2}h_{\tau_k}(\beta_{\tau_k})\right\}, \tag{2.9}$$

$$\beta(t)=\beta_{\tau_k},\quad t\in[\tau_k,\ \tau_{k+1}). \tag{2.10}$$

定理 1 设 $A(z)$ 与 $B(z)$ 互质. 对情形 1) 所讨论的 $w(t)$, 设 $\theta(t)$ 和 $F(t)$ 由 (1.5) ~ (1.11) 式给出, 而对情形 2) 所讨论的 $w(t)$, $\theta(t)$ 和 $P(t)$ 由 (1.12) ~ (1.14) 式给出, 并记 $F(t)=P^{1/2}(t)$. 如果 $\beta(t)$ 据 (2.9)、(2.10) 式选取, 那么在 (2.1) ~ (2.6) 式给出的适应控制作用下, 存在自然数 k_0, 使 $\tau_{k_0}=\infty$, 也就是有限步修正后, $\beta(t)$ 取常值. 这时对情形 1) 存在 $\overline{\mu}>0$ 使得对任意的 $\mu\in[0,\ \overline{\mu})$, 闭环系统的输入输出有界, 而对情形 2) 闭环系统的输入输出有界.

证 只要证明存在自然数 k_0 使得 $\tau_{k_0}=\infty$. 这时据 (2.10) 式对 $t\geqslant\tau_{k_0}$, 有 $\beta(t)=\beta_{\tau_{k_0}}$, $\beta(t)$ 就满足性质 1) 及 2), 那么系统输入、输出的有界性结论就得自命题 1.

由于 $\theta(t)$ 和 $F(t)$ 收敛, 所以对任一 $\beta_i\in\mathscr{M}$, $h_t(\beta_i)\triangleq|\det M(\theta(t)+F(t)\beta_i)|\xrightarrow[t\to\infty]{}h(\beta_i)\geqslant0$. 将 $\mathscr{M}$ 分解为 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_1\cup\mathscr{M}_2$, 使得对 $\mathscr{M}_1$ 中的 β_i 有 $h(\beta_i)>0$, 而对 $\mathscr{M}_2$ 中的 β_i 有 $h(\beta_i)=0$.

由文献[6] 中的 (4.33) 式知, $\sum\limits_{i=1}^{ml}h(\beta_i)>0$, 所以 $\mathscr{M}_1$ 是 $\mathscr{M}$ 的非空子集. 记 $h\triangleq\min\limits_{\beta_i\in\mathscr{M}_1}h(\beta_i)$. 由于 $\mathscr{M}$ 是有限集, $\mathscr{M}_1$ 是 $\mathscr{M}$ 的非空子集, 所以 $h>0$.

下面要多次用到如下简单事实: 设 $f(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}f>0$, 则存在 T, 当 $t,\ s\geqslant T$ 时,

$$f(t)\geqslant\frac{1}{2}f(s)>0. \tag{2.11}$$

对任意的 $\beta_j\in\mathscr{M}_2$, 存在 $T'(\beta_j)$, 使得对所有的 $t\geqslant T'(\beta_j)$ 有 $h_t(\beta_j)<2h/3$. 因此, 只要 $t\geqslant\max\limits_{\beta_i\in\mathscr{M}_1,\ \beta_j\in\mathscr{M}_2}\{T(\beta_i),\ T'(\beta_j)\}$, 对一切 $\beta_i\in\mathscr{M}_1$ 和 $\beta_j\in\mathscr{M}_2$ 有

$$|\det M(\theta(t)+F(t)\beta_i)|>2h/3>|\det M(\theta(t)+F(t)\beta_j)|. \tag{2.12}$$

从(2.12)式知, 对充分大的 t, 根据(2.8)式选出的 β_{τ_k} 必属于 $\mathscr{M}_1$, 所以只要 k 充分大(即 τ_k 充分大), $\beta_{\tau_k}\in\mathscr{M}_1$. 进而由(2.11)式知

$$h_t(\beta_{\tau_k})>h_s(\beta_{\tau_k})/2,\ \forall t\geqslant T(\beta_{\tau_k}),\ \forall s\geqslant T(\beta_{\tau_k}). \tag{2.13}$$

记 $T=\max\limits_{\beta_i\in\mathscr{M}_1}T(\beta_i)$. 因为 $\mathscr{M}_1$ 是有限集, 所以 $T<\infty$. 当 k 充分大时, $\tau_k>T$, 则从(2.13)式知 $h_t(\beta_{\tau_k})>h_{t_k}(\beta_{\tau_k})/2$, $\forall t\geqslant\tau_k>T(\beta_{\tau_k})$, 所以存在自然数 k_0 使得 $\tau_{k_0}=\infty$.

3　减少修正参数的维数

在上一节设计的适应控制律中, 用了停时, 使有限步后对 $\theta(t)$ 的修正参数 $\beta(t)$ 不用再重新计算, 这样就省去许多计算. 但 $\beta(t)$ 是 $2n$ 维, 用上面的方法, 每一时刻都要验算 $(2n)^{2n}$ 个 $2n$ 阶阵的行列式, 计算量很大. 这一节设法压缩 $\beta(t)$ 的维数, 使计算量大幅地减少. 就以三阶系统为例, 每算一步, 要验算 46 656 个六阶矩阵的行列式. 如果把 $\beta(t)$ 减少二维, 即从六维降到四维, 则每次验算的行列式数就降到 1 296 个, 计算量减少 97%以上.

引理 1　设 $F(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}F$, F 的秩为 j. 且设 $U(t)$ 是正交矩阵使

$$U(t)F(t)U^\tau(t)=\mathrm{Diag}(\lambda_1(t),\cdots,\lambda_{2n}(t))\text{ 及 }\lambda_1(t)\geqslant\lambda_2(t)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{2n}(t).$$

对任意的自然数 $i\leqslant k\leqslant 2n$, 用 $U_{i:k}(t)$ 表示 $U(t)$ 的第 i 行至第 k 行按原来的顺序构成的阵. 对自然数 $s\leqslant 2n$ 和 $i=1,\cdots,(2n)^s$, 令 $\beta_{i,s}=[\sigma_i,\ \sigma_i^{2n},\ \cdots,\ \sigma_i^{(2n)^{s-1}}]^\tau$, 这里 $\sigma_i\geqslant\sigma_{i-1}+1$.

又设 θ 使 $\det M(\theta)\neq 0$. 那么存在不依赖于 t 及 $F(t)$ 的常数 $\varepsilon>0$, 使对一切充分大的 t 有

$$\sup_{i=1,2,\cdots,(2n)^s}|\det M(\theta(t)+U^\tau_{1:s}(t)\beta_{i,s})|>\varepsilon,\ \forall s\in\{j,\ j+1,\cdots,2n\}.$$

证　记 $\beta^*(t)=F^{-1}(t)(\theta-\theta(t))$, 则由文献[6]知 $\{\beta_t^*\}$ 有界. 直接计算得

$$F(t)\beta^*(t)=U^\tau_{1:s}(t)\mathrm{Diag}(\lambda_1(t),\cdots,\lambda_s(t))\,U_{1:s}(t)\beta^*(t)+$$
$$U^\tau_{(s+1):(2n)}(t)\mathrm{Diag}(\lambda_{s+1}(t),\cdots,\lambda_{2n}(t))\,U_{(s+1):(2n)}(t)\beta^*(t).$$

注意到上式第二项趋于零, 及 $\det M(\theta(t)+F(t)\beta^*(t))=\det M(\theta)\neq 0$, 对一切充分大的 t,

$$\det M(\theta(t)+U^\tau_{1:s}(t)v(t))\neq 0,$$

这里 $v(t)=\mathrm{Diag}(\lambda_1(t),\cdots,\lambda_s(t))\,U_{1:s}(t)\beta^*(t)$.

用 $U^\tau_{1:s}(t)$ 取代文献[6]定理 2 中的 F_t, 仍记 $v(\sigma_i)=[1,\ \sigma_i,\ \cdots,\ \sigma_i^{m^m-1}]^\tau$, 那么文献[6]中的(4.21)～(4.25)式照样成立, 而在(4.26)式中的 θ^* 和 β_t^* 相应地被 $\theta(t)+U^\tau_{1:s}(t)v(t)$ 及 $v(t)$ 所取代, 而该定理的其余证明都照样成立. 由此便知命题成立.

引理 2　在引理 1 的条件下, 对任意 $\beta_{i,s}$, $s\leqslant j$, 存在有界$\{\beta(t)\}$使

$$U^\tau_{1:s}(t)\beta_{i,s}=F(t)\beta(t).$$

证 取 $\beta(t)=U_{1:s}^{\tau}(t)\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}(t),\cdots,\lambda_s^{-1}(t))$, 显然 $\{\beta(t)\}$ 有界. 由于

$$F(t)=[U_{1:s}^{\tau}(t),\ U_{(s+1):(2n)}^{\tau}(t)]\mathrm{Diag}(\lambda_1(t),\cdots,\lambda_{2n}(t))\begin{bmatrix} U_{1:s}(t) \\ U_{(s+1):(2n)}(t) \end{bmatrix},$$

所以 $F(t)\beta(t)=U_{1:s}^{\tau}(t)\beta_{i,s}$.

用 $j(t)$ 表示 $U_{1:j(t)}(t)$ 的行数, 并将 $U(t)$ 分块写为 $U(t)=[U_{1:j(t)}^{\tau}(t),\ U_{(j(t)+1):(2n)}^{\tau}(t)]^{\tau}$. 特别地, 当 $j(t)=0$ 时, 约定 $U_{1:j(t)}(t)$ 的行数为零.

取初值 $\tau_1=0$, $j(\tau_1)=0$ 和 $\varepsilon_{\tau_1}\in(0,\ \lambda_{2n}(\tau_1)/2)$. 对 $k=1$ (进而, 递推地对 $k=2, 3, \cdots$) 求 $\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)}$ 使

$$|\det M(\theta(\tau_i)+U_{1:j(\tau_i)}^{\tau}(\tau_i)\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)})|=$$

$$\max_{k=1,2,\cdots,(2n)^{j(\tau_i)}}|\det M(\theta(\tau_i)+U_{1:j(\tau_i)}^{\tau}(\tau_i)\beta_{k,j(\tau_i)})|\triangleq g_{\tau_i}(\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)}), \tag{3.1}$$

这里 $g_t(\beta_{k,j(\tau_i)})=|\det M(\theta(t)+U_{1:j(\tau_i)}^{\tau}(t)\beta_{k,j(\tau_i)})|$.

定义

$$\tau'_{i+1}=\inf\{t:\ t>\tau_i \text{ 和 } \lambda_{j(\tau_i)}(t)\leqslant\varepsilon_{t_i}\}, \tag{3.2}$$

$$\tau''_{i+1}=\inf\left\{t:\ t>\tau_i \text{ 和 } g_t(\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)})\leqslant\frac{1}{2}g_{\tau_i}(\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)})\right\}, \tag{3.3}$$

$$\tau'''_{i+1}=\begin{cases}\tau_i+1, & \text{当 } g_{\tau_i}(\beta_{k(\tau_i),j(\tau_i)})=0 \text{ 时},\\ \infty, & \text{否则};\end{cases} \tag{3.4}$$

$$\tau_{i+1}=\min\{\tau'_{i+1},\ \tau''_{i+1},\ \tau'''_{i+1}\}, \tag{3.5}$$

$$j(\tau_{i+1})=j(\tau_i)-1,\ \text{当 } \tau'_{i+1}<\tau''_{i+1} \text{ 且 } \tau'''_{i+1}=\infty \text{ 时}, \tag{3.6}$$

$$j(\tau_{i+1})=j(\tau_i)+1,\ \text{当 } \tau'''_{i+1}<\infty, \text{或 } \tau'_{i+1}\geqslant\tau''_{i+1} \text{ 且 } \tau'''_{i+1}=\infty \text{ 时}; \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_{j(\tau_{i+1})}=\frac{1}{2}\lambda_{j(\tau_{i+1})}(\tau_{i+1}). \tag{3.8}$$

引理 3 设 $F(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}F$, 且 F 的秩为 j, 则存在自然数 i_0, 使得 $\tau_{i_0+1}=\infty$, 并且 $j(\tau_{i_0})\leqslant j$, 即 $\beta_{k(\tau_{i_0}),j(\tau_{i_0})}$ 的维数不大于 j.

证 当 i 和 k 分别取值为 $i=1,2,\cdots,(2n)^k$ 和 $k=1,2,\cdots,2n$ 时, $\beta_{i,k}$ 的全体记为 $\mathscr{S}$, 显然它是有限集. 由于 $\theta(t)$ 和 $U(t)$ 收敛, 所以 $\forall\beta_{i,k}\in\mathscr{S}$, 有

$$g_t(\beta_{i,k})\triangleq|\det M(\theta(t)+U_{1:k}^{\tau}(t)\beta_{i,k})|\xrightarrow[t\to\infty]{}g(\beta_{i,k})\geqslant 0.$$

对任一 $g(\beta_{i,k})>0$, 根据 (2.11) 式存在 $T(\beta_{i,k})$, 使得

$$g_t(\beta_{i,k})>\frac{1}{2}g_s(\beta_{i,k}),\ \forall t,\ s\geqslant T(\beta_{i,k}). \tag{3.9}$$

把 $\mathscr{S}$ 分为 $\mathscr{S}_1$ 和 $\mathscr{S}_2$ 两部分, 使得 $\mathscr{S}=\mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2$ 和

$$\beta_{i,k}\in\begin{cases}\mathscr{S}_1, & \text{当 } g(\beta_{i,k})>0 \text{ 时},\\ \mathscr{S}_2, & \text{当 } g(\beta_{i,k})=0 \text{ 时}.\end{cases}$$

由于定理 1 中的集合 $\mathscr{M}_1$ 是这里的集合 $\mathscr{S}_1$ 的子集, 所以 $\mathscr{S}_1$ 是集合 $\mathscr{S}$ 的非空子集. 记 $g=$

$\min\limits_{\beta_{i,k}\in\mathscr{S}_1} g(\beta_{i,k})$. 由于 $\mathscr{S}$ 是有限集，$\mathscr{S}_1$ 是 $\mathscr{S}$ 的子集，所以必有 $g>0$.

对任一 $\beta_{p,q}\in\mathscr{S}_2$，存在 $T'(\beta_{p,q})$ 使得 $\forall t\geqslant \max\limits_{\beta_{i,k}\in\mathscr{S}_1}\{T(\beta_{i,k}),\ T'(\beta_{p,q})\}$ 有

$$g_t(\beta_{p,q})=|\det M(\theta(t)+U^{\tau}_{1:q}(t)\beta_{p,q})|<\frac{2}{3}g<g_t(\beta_{i,k}). \tag{3.10}$$

由 $F(t)\xrightarrow[t\to\infty]{} F$ 且 F 的秩为 j 知，对 $k\leqslant j$, $\lambda_k(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\lambda_k>0$. 所以用(2.11)式知对充分大的 s,

$$\lambda_k(t)>\frac{1}{2}\lambda_k(s),\ \forall t\geqslant s. \tag{3.11}$$

反设对任意的自然数 i, $\tau_i<\infty$. 由于 $F(t)$ 的维数有穷，所以(3.6)式必出现无穷次．因为否则将只出现无穷次(3.7)式，而这不可能．

由(3.11)式知，对充分大的 i, 如果 $j(\tau_i)\leqslant j$, 则必有

$$\lambda_{j(\tau_i)}(t)>\frac{1}{2}\lambda_{j(\tau_i)}(\tau_i)=\varepsilon_{\tau_i}. \tag{3.12}$$

因此，对充分大的 i, 如果出现(3.6)式，则由(3.2)和(3.12)式知，必有 $j(\tau_i)>j$. 这时，根据引理 1, 必有 $j(\tau_i)$ 维矢量 $\beta_{p,\,j(\tau_i)}\in\mathscr{S}_1$. 所以据(3.10)式知，只要 i 充分大，当发生(3.6)式时，由(3.1)式给出的 $\beta_{k(\tau_i),\,j(\tau_i)}\in\mathscr{S}_1$. 利用(3.9)式便知，当 i 充分大时，如果出现(3.6)式，那么对 $s>i$, 不可能发生(3.7)式．所以，如果(3.6)式无穷次出现，那么对充分大的 i 以后，只可能再出现(3.6)式．但每出现一次(3.6)式，$j(\tau_i)$ 就要减少一，因此有穷次后必有 $j(\tau_i)\leqslant j$. 但据(3.12)式这不可能．因此(3.6)式不可能无穷次出现．所以存在 i_0 使得 $\tau_{i_0+1}=\infty$.

现反设 $j(\tau_{i_0})>j$, 那么 $\lambda_{j(\tau_{i_0})}(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$. 据(3.2)式，$\tau'_{i_0+1}<\infty$, 所以 $\tau_{i_0+1}<\infty$. 这和 $\tau_{i_0+1}=\infty$ 相矛盾．所以 $j(\tau_{i_0})\leqslant j$.

对 $\theta(t)$ 的修正 $\overline{\theta}(t)$ 定义为 $\overline{\theta}(t)=\theta(t)+U^{\tau}_{1:j(\tau_i)}(t)\beta_{k(\tau_i),\,j(\tau_i)}$, $\forall t\in[\tau_i,\ \tau_{i+1})$.

定理 2　设 $A(z)$ 与 $B(z)$ 互质．对情形 1) 所讨论的 $w(t)$, 设 $\theta(t)$ 和 $F(t)$ 由(1.5)～(1.11)式给出时，而对情形 2) 所讨论的 $w(t)$, $\theta(t)$ 和 $P(t)$ 由(1.12)～(1.14)式给出，并记 $F(t)=P^{1/2}(t)$. 定义适应极点配置控制：

$$u(t)=\begin{cases}[1-S(t,\ z)]u(t)-R(t,\ z)y(t)+C(z)y^*(t), & \text{当}\ \det M(\overline{\theta}(t))\neq 0\ \text{时},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}$$

这里的 $S(t,\ z)$, $R(t,\ z)$ 和 $M(\overline{\theta}(t))$ 由(2.1)～(2.5)式给出，$C(z)$ 和 $y^*(t)$ 的意义与上一节相同．那么对情形 1), 存在 $\overline{\mu}>0$ 使得对任意的 $\mu\in[0,\ \overline{\mu})$, 闭环系统的输入输出是有界的；而对情形 2), 闭环系统的输入输出是有界的．

证　据引理 3, 对 $t\geqslant\tau_{i_0}$,

$$|\det M(\theta(t)+U^{\tau}_{1:j(\tau_{i_0})}(t)\beta_{k(\tau_{i_0}),\,j(\tau_{i_0})})|>\frac{1}{2}g_{\tau_{i_0}}(\beta_{k(\tau_{i_0}),\,j(\tau_{i_0})})>0.$$

由于 $j(\tau_{i_0})\leqslant j$, 据引理 2 知存在有界的 $\beta(t)$, 使对 $t\geqslant\tau_{i_0}$,

$$\overline{\theta}(t)=\theta(t)+U^{\tau}_{1:j(\tau_{i_0})}(t)\beta_{k(\tau_{i_0}),\,j(\tau_{i_0})}=\theta(t)+F(t)\beta(t).$$

所以现在的修正具有(2.1)式的形式，而且 $\{\beta(t)\}$ 满足性质 1) 及 2). 定理结论就得自命题 1.

注　对情形 2), 和文献[8]相类似，只要求 $A(z)$ 与 $B(z)$ 互质，应用衰减激励信号可解决适

应二次性能指标控制．但这里对 $\beta(t)$ 只修正有穷次．

参 考 文 献

1 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E. Discrete time stochastic adaptive control. SIAM J Control and Optimization, 1981, 19(6): 829～853

2 Guo L, Chen H F. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, 36(7): 1 033～1 043

3 Kreisselmeier G. An indirect adaptive controller with a self-excitation capability. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(5): 524～528

4 Giri F, M'Saad M, Dugard L *et al*. Robust adaptive regulation with minimal priori knowledge. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(3): 305～315

5 Chen H F, Zhang J F. Adaptive stabilization of unstable and nonminimumphase stochastic systems. Systems & Control Letters, 1993, 20(1): 27～38

6 Lozano R, Zhao X H. Adaptive pole placement without excitation probing signals. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(1): 47～58

7 Zhang J F. Comments on "robust adaptive regulation with minimal prior knowledge". IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(3): 605

8 Guo L. Self-convergence of weighted least-squares with applications to stochastic adaptive control. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(1): 20